

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования**

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ  
(ТУСУР)**

**Кафедра физической электроники**

**Мухачёв В.А.**

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МИКРО- И НАНОСИСТЕМНОЙ  
ТЕХНИКИ**

Методические указания по выполнению лабораторных работ для  
студентов направления 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная  
техника», профиль «Нанотехнологии в электронике и  
микросистемной технике»

Томск-2015

# I. ИССЛЕДОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ И ХАРАКТЕРИСТИК СТРУННОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

Цель работы – изучение конструкции и расчет характеристик чувствительных элементов акселерометров с подвесом инерционной массы на струнах

## 1. Основные сведения об акселерометрах с упругим подвесом струнного типа

В подавляющем большинстве микромеханических конструкций первичный преобразователь акселерометра представляет собой инерционную массу, подвешенную к неподвижному основанию – рамке с помощью упругих элементов. Выбор способа подвеса инерционной массы, т.е. используемых при этом упругих элементов, их числа и взаимного расположения, будет определять эффективность преобразования действующего ускорения в перемещение инерционной массы. Измерение смещения ( $x$ ) инерционной массы под действием ускорения  $\alpha$  можно осуществлять оптическими, емкостными и тензометрическими методами. В качестве упругих элементов подвеса инерционной массы могут выступать балки, струны, торсионы и мембраны [1].

Основные конструктивные схемы подвеса инерционной массы с помощью таких упругих элементов, как балки и струны, для акселерометра с одной координатой измерения представлены на рис.1.1.

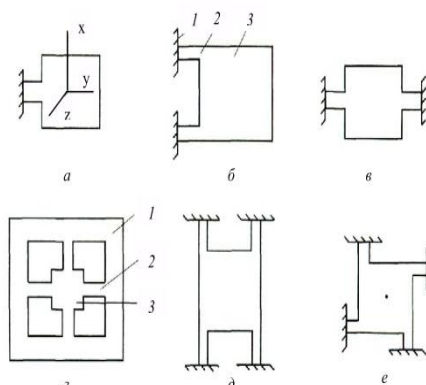


Рис.1.1. Схемы подвеса инерционной массы первичного преобразователя:  
*a, б* – консольная; *в, г, д* – симметричная мостовая; *е* – асимметричная ;  
*1* – рамка; *2* – упругая балка; *3* – инерционная масса; *z* – активная ось; *x, y* – пассивные

Поперечная чувствительность (к перпендикулярным направлениям сил инерции) возникает при расположении центра инерционной массы вне линии подвеса балок или струн, (рис. 1.2, а). Наличие поперечной чувствительности не желательно, т.к. оно приводит к появлению ложных сигналов или изменению условий отражения при смене положения инерционной массы относительно поля тяжести (рис. 1.2, б).

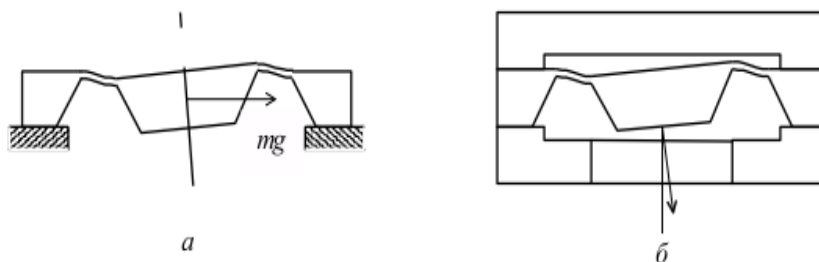


Рис.1.2. Деформация упругих элементов под действием касательных сил инерции

Для исключения действия касательных сил необходимо использовать симметричные относительно центра масс способы подвеса. Технологически возможен вариант с двухсторонним травлением и образованием центральной балки (рис. 1.3, а), но затруднен контроль процесса травления и его остановки при получении очень тонких кремниевых балок. При использовании двухстороннего совмещения и профилирования балок и струн на основе стоп-слоев изготавливаются чувствительные элементы с симметричным закреплением инерционной массы относительно центра (рис. 1.3, б).



Рис.1.3. Виды симметричного подвеса инерционной массы относительно ее центра масс

Практический опыт показывает, что подвес на струнах предпочтительнее, чем подвес на балках. Использование подвеса на струнах повышает относительную прочность конструкции, что, по-видимому, связано с уменьшением концентрации точечных

дефектов в сверхтонких структурах. Малая толщина и незначительная дефектность струн позволяют достигать высоких значений критических механических напряжений (до  $2 \cdot 10^9$  Па) [1].

Под термином «струна» в данном случае принимается протяженный упругий элемент, в котором деформации растяжения существенно превосходят деформации изгиба. Особенно это проявляется в тонких (менее 1 мкм) пленках с остаточными механическими напряжениями, возникающими при формировании этих пленок.

Струны и другие элементы конструкции преобразователя изготовлены стандартными методами микротехнологии объемного травления, при этом в качестве материала для струн применялись различные материалы ( $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , SiC) и их композиции. Это позволило задавать величину внутренних механических напряжений в струнах, которые, в свою очередь, определяют величину перемещения инерционной массы и прочность конструкции преобразователя.

Для минимизации поперечной чувствительности инерционная масса подвешена симметрично на струнах, сформированных на двух сторонах кремниевой пластины. Струны закреплены в углах инерционной массы, что обеспечивает технологичность их изготовления при анизотропном травлении подложки. Общий вид конструкции первичного преобразователя с подвесом инерционной массы на струнах представлен на рис. 1.4.

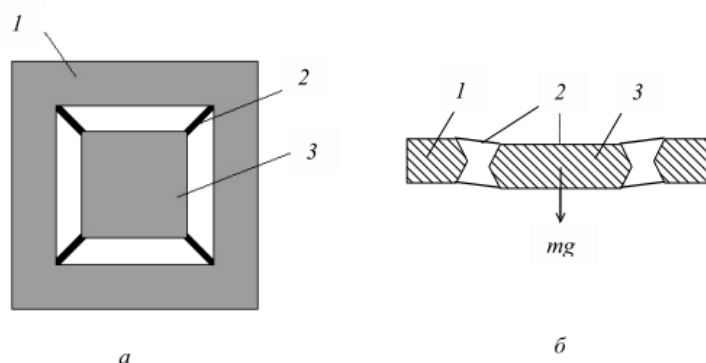


Рис.1.4. Общий вид конструкции первичного преобразователя с подвесом инерционной массы на струнах:  
*а* – топология первичного преобразователя, *б* – параллельное смещение инерционной массы под действием ускорения, *1* – жесткое основание, *2* – струна, *3* – инерционная масса

## 2. Расчет характеристик струнного преобразователя

Для расчета конструктивных параметров и частотных характеристик первичного преобразователя с подвесом инерционной массы на струнах используем теорию деформаций. При этом считаем, что на инерционную массу  $m$  действует сила  $m\alpha$  ( $\alpha$  – измеряемое ускорение), которая приводит к смещению положения и удлинению струн за счет их растяжения (рис. 2.1).

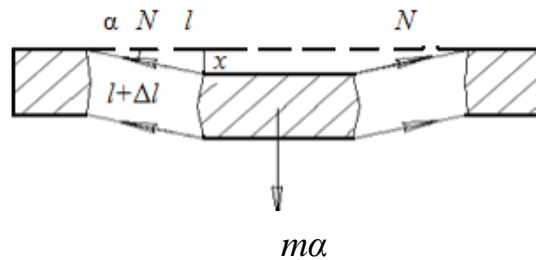


Рис.2.1. Схема перемещения инерционной массы подвешенной на струнах

В этом случае в каждой струне возникает сила натяжения

$$N = \sigma_{\Sigma} \cdot s \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{\Sigma}$  – суммарное внутреннее напряжение струны,  $s=bh$  – площадь поперечного сечения струны ( $b$  и  $h$  – соответственно, ее ширина и толщина). Действующая на инерционную массу сила  $m\alpha$  определяется из уравнения

$$m\alpha = nNs \sin \alpha \quad (2.2)$$

где  $n$  – число струн;  $N$  – сила натяжения каждой струны;  $\alpha$  – угол, на который отклонилась струна относительно своего начального положения.

Внутреннее напряжение в поперечном сечении струны  $\sigma$  определяется различными факторами. В пределах малых удлинений справедлив закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon$  – относительная деформация струны,  $E$  – модуль Юнга для материала струны. Кроме того, в результате различных технологических операций в струнах возникают внутренние механические напряжения  $\sigma_0$ , которые могут значительно превышать величину  $\sigma$ .

С учетом этих замечаний, суммарное внутреннее напряжение, которое возникает в поперечном сечении струны, определяется как

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma + \sigma_0. \quad (2.4)$$

Из выражения для прямоугольного треугольника (рис. 2.1):

$$l^2 + x^2 = (l + \Delta l)^2,$$

учитывая  $\varepsilon = \Delta l / l$  и малые деформации  $\Delta l$ , получаем соотношение:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2, \quad (2.5)$$

где  $l$  – длина струны,  $x$  – смещение инерционной массы.

Учитывая полученные выражения (2.1)–(2.5) и малые углы  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx x/l$ ), представим (2.2) в виде

$$m\alpha = n(\sigma_0 + \sigma)s \cdot \sin \alpha \approx n\sigma_0 b h \frac{x}{l} + nE \frac{b h}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3, \quad (2.6)$$

которое описывает связь между действующим ускорением  $\alpha$  и перемещением  $x$  инерционной массы первичного преобразователя.

Оценочные расчеты по формуле (2.6) для конструктивных параметров первичного преобразователя, определяемых возможностями технологий микромеханики, показывают, что малые ускорения (меньше ускорения свободного падения) вызывают очень незначительные перемещения инерционной массы ( $x^2 / l^2 \ll \sigma_0 / E$ ). В этом случае, пренебрегая вторым нелинейным слагаемым в уравнении (6), перемещение инерционной массы под действием ускорения с хорошим приближением можно вычислять по формуле

$$x = \frac{m\alpha l}{n h b \sigma_0}. \quad (2.7)$$

Следовательно, выполняется одно из важнейших требований, предъявляемых к устройству, при малых величинах ускорения  $\alpha$  сохраняется линейность его преобразования в перемещение инерционной массы [1].

Чувствительность (к перемещению) такого микромеханического преобразователя определяется выражением

$$S_{ens} = \frac{x}{a} = \frac{m l}{n h b \sigma_0} \quad (2.8)$$

Размерность  $[S_{ens}] = c^2$

Резонансная частота  $f_0$  собственных колебаний инерционной массы преобразователя рассчитывается по формуле

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{x}} \quad (2.9)$$

или, с учетом соотношения (2.7)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{nhb\sigma_0}{ml}}. \quad (2.10)$$

Таким образом, подбирая параметры системы (ширину, высоту и длину струны, инерционную массу, число струн и начальное внутреннее напряжение струны), можно задать необходимую резонансную частоту (2/10) и чувствительность (2.8). Стоит заметить, что из соотношений (2.8) и (2.9) следует взаимосвязь чувствительности и резонансной частоты:

$$S_{ens} f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2}, \quad (2.11)$$

что несколько ограничивает допустимый выбор параметров преобразователя. Акселерометр штатно работает до резонансной частоты, поэтому необходимо выбирать оптимальные значения рабочей частоты и требуемой чувствительности с учетом (2.11).

Параметр чувствительности ограничен также нелинейностью преобразования и прочностью материала струн при действии максимальных нагрузок (критических ускорений). Чтобы оценить критическое ускорение  $\alpha_{кр}$ , при котором в струне возникают напряжения, превышающие критически допустимые для данного материала  $\sigma_{кр}$ , представим выражение (2.4) для суммарного напряжения в поперечном сечении струны в виде

$$\sigma_{кр} = \sigma_{\Sigma} = \sigma + \sigma_0 = \varepsilon E + \sigma_0 = \frac{x_{кр}^2}{2l^2} E + \sigma_0. \quad (2.12)$$

Из формулы (2.12) выразим значение критического прогиба  $x_{кр}$ :

$$\square. \quad x_{кр} = l \sqrt{\frac{2(\sigma_{кр} - \sigma_0)}{E}} \quad (2.13)$$

Подставив выражение (2.13) в формулу (2.6), определим критическое значение ускорения  $\alpha_{кр}$ :

$$\alpha_{кр} = \frac{nhb\sigma_{кр}}{m} \sqrt{\frac{2(\sigma_{кр} - \sigma_0)}{E}}. \quad (2.14)$$

Учитывая характерные размеры преобразователя и то, что, например, для газофазного  $\text{Si}_3\text{N}_4$  максимально допустимые напряжения  $\sigma_{кр} \approx 2 \cdot 10^9$  Па, для идеального случая, в соответствии с

(2.14) можно получить очень значительные критические ускорения (до тысячи g). В реальности, необратимые разрушения возникают при меньших нагрузках из-за концентрации механических напряжений на неровных краях струн и местах их крепления к основанию [1].

Фотографии изготовленных струнных преобразователей и их элементов представлены на рис. 2.2.

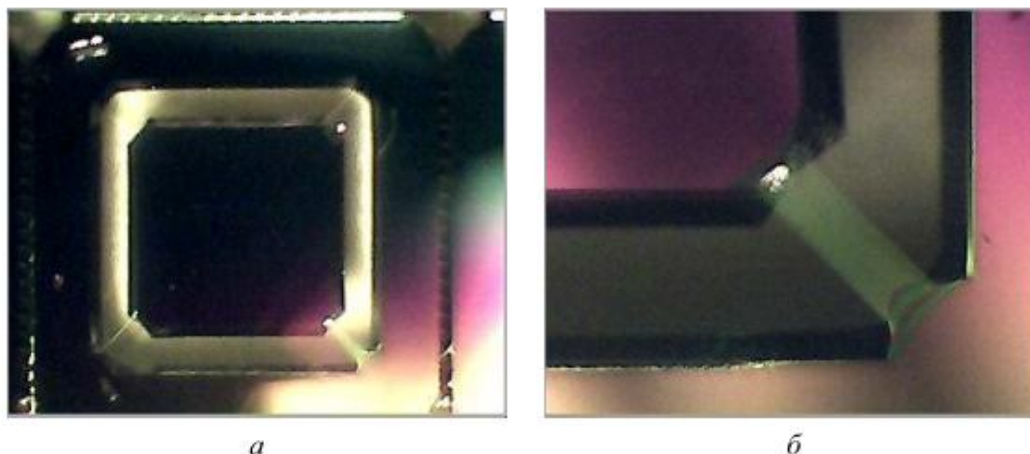


Рис.2.2. Фотографии:

*а* – чувствительного элемента акселерометра;

*б* - элемента подвеса инерционной массы-струны из пленки  $\text{Si}_3\text{N}_4$

Для защиты механической микросистемы от перегрузок и случайных ударных воздействий используют специальные «крышки», выполненные из кремния, которые ограничивают свободное перемещение инерционной массы.



### 3. Емкостные преобразователи перемещений

Работа преобразователей этого типа основана на изменении емкостей между подвижным электродом, располагаемым обычно на ИМ, и неподвижными электродами, размещаемыми на элементах корпуса (рис.3.1.)

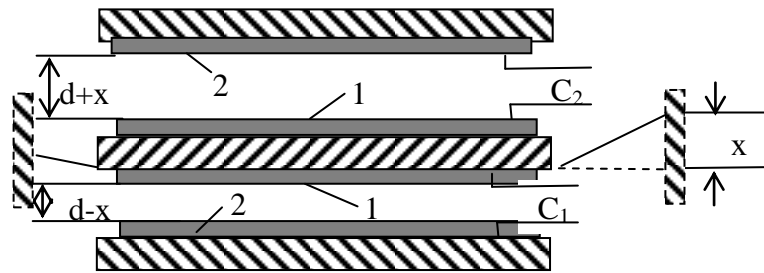


Рис.3.1. Емкостный преобразователь перемещений:  
1 и 2 – подвижный и неподвижный электроды

Емкости между соответствующими парами электродов:

$$C_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d - x}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d + x}; \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды между электродами;  $s$  – площадь взаимного перекрытия электродов;  $d$  – начальный зазор между электродами;  $x$  – изменение расстояния между электродами. Для исключения влияния изменения площади взаимного перекрытия  $s$  площадь одного из электродов, обычно подвижного, должна быть меньше площади других электродов.

Надо иметь в виду также, что между каждой парой электродов существует взаимодействие (тяжение), определяемое формулой:

$$F_T = \frac{q^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 S}, \quad (3.2)$$

где  $q$  – электрический заряд на электродах.

Как и в любых конструкциях из разнородных материалов (например, Si и Al), ощутимыми могут быть температурные ошибки, обусловленные линейным расширением элементов конструкции.

При малых значениях ускорения « $\alpha$ », следовательно, при небольших значениях смещения ИМ « $x$ », выходной сигнал  $U_{\text{вых}}$  будет небольшим, обязательно в данном случае необходим усилитель  $U_{\text{вых}}$ .

Кроме того, желательно, чтобы электрическая схема компенсировала влияние температуры и диэлектрической проницаемости среды. Она должна быть чувствительной к знаку перемещения. Силы тяжения в данном случае влияния не оказывают, т.к. при последовательном включении измерительных конденсаторов заряды на них  $q_1$  и  $q_2$  равны.

Электрические схемы могут быть достаточно сложными, одна из них приведена на рис.3.2[2].

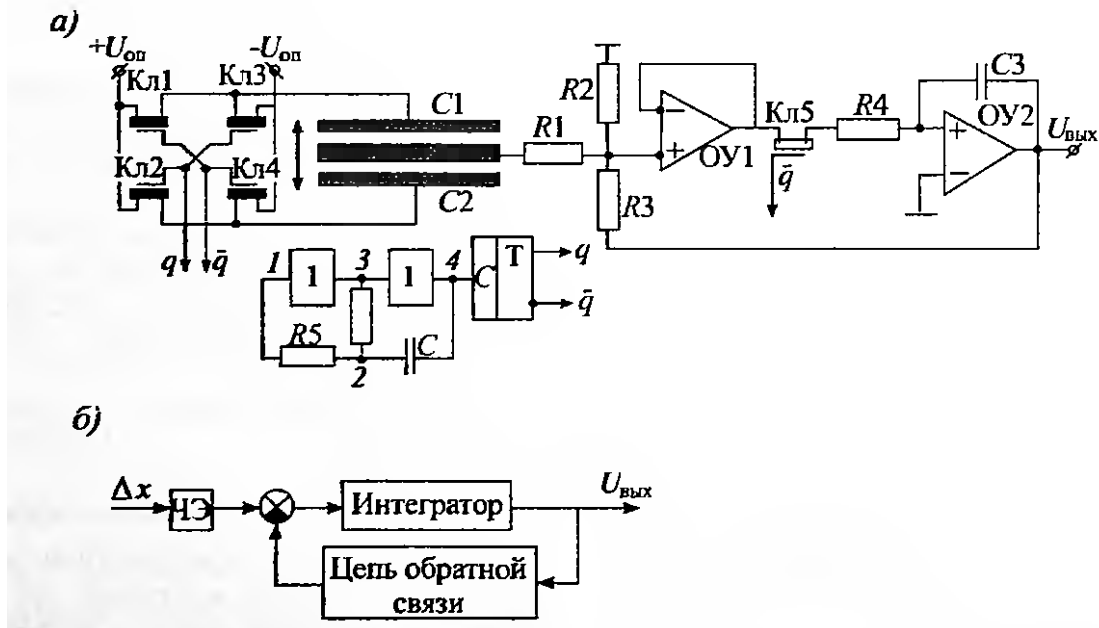


Рис.3.2. Схемы включения емкостного преобразователя перемещений:

а – принципиальная, б – структурная,  
 ОУ1, ОУ2- операционные усилители, Т - транзистор

Анализ работы этой схемы приводит к выводу, что

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{оп}} \cdot \frac{x}{2d}, \quad (3.3)$$

где  $U_{\text{оп}}$  – опорное напряжение

#### 4. Задание. Порядок выполнения работы

##### 4.1. Предварительные расчеты

Из формулы (2.7) выразим  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{nhb\sigma_0 x}{ml}, \quad (4.1)$$

Из формулы (3.3) выразим  $x$  и подставим в (4.1):

$$x = \frac{U_{\text{ВЫХ}} \cdot 2d}{U_{\text{ОП}}} \Rightarrow \alpha = \frac{2nhb\sigma_0 d}{mlU_{\text{ОП}}} \cdot U_{\text{ВЫХ}} \quad (4.2)$$

Формула (4.2) является рабочей формулой, по которой можно вычислить ускорение. В ней присутствуют характеристики нитей ( $h, b, l, \sigma_0$ ), инерционной массы ( $m$ ), которые зависят от технологии и геометрии устройства. Они, как правило, задаются требованиями к акселерометру и возможностями технологии.

Вычислим возможное значение инерционной массы  $m$ . Примем следующие параметры: материал – Si, площадь –  $S=25\text{мм}^2$ , толщина –  $h_1=2$  мкм. Кроме того, с обеих сторон ИМ нанесена пленка Al толщиной 0,1 мкм.

$$m = \rho_1 \cdot S \cdot h_1 + 2\rho_2 \cdot S \cdot h_2 = S(\rho_1 h_1 + 2\rho_2 h_2), \quad (4.3)$$

где  $\rho_1, h_1$  - плотность и толщина кремния;

$\rho_2, h_2$  - плотность и толщина алюминия.

В таблице 4.1. приведены некоторые характеристики используемых материалов.

Таблица 4.1.

Характеристики материалов, используемых при изготовлении акселерометров

Параметры Материал	Плотность $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	Остаточное напряжение $\sigma_0$ , Г Па	Модуль Юнга E, Г Па	Предел прочности на растяжение $\sigma_{\text{пр}}$ , Г Па
Si	2,32	0,34	210	4,0
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	3,1	0,6	320	7,0
SiO <sub>2</sub>	2,65	0,12	75	1,4
SiC	2,55	0,32	≈200	3,6
Al	2,7	-	≈100	$1,7 \cdot 10^{-3}$

Тогда  $m=25 \cdot 10^{-6}(2,3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}) = 25 \cdot 10^{-6} \cdot 5,14 \cdot 10^{-3} = 130 \cdot 10^{-9}$  кг

С учетом массы контактов, находящихся на ИМ, можно принять

$$m=200 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ кг.}$$

$U_{\text{ОП}}$  определяется электрической прочностью воздушного промежутка  $d$ , примем  $d_{\text{min}}=1$  мкм,  $E_{\text{пр}}$  воздуха = 30 кВ/см =  $3 \cdot 10^6$  В/м.

$$U_{\text{ОП}} = E_{\text{пр}} \cdot d = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} = 3 \text{ В.}$$

Примем значение  $U_{оп}=1$  В, учитывая, что расстояние  $d$  уменьшается на  $x$ , и необходимо иметь некоторый запас прочности ( $E_{пр}$ ).

Остается весьма неопределенной величина остаточного напряжения ( $\sigma_0$ ), которая даже для одного и того же материала сильно зависит от технологии приготовления. В литературе указывается, что  $\sigma_0$  сравнимо с  $\sigma$ , возникающими в процессе работы. Оценим значение  $\sigma$  при  $x=0,4$  мкм и  $l=5$  мкм.

Относительное удлинение

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 = \left( \frac{0,4}{5} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 3,2 \cdot 10^{-3}$$

Тогда  $\sigma = \varepsilon E = 3,2 \cdot 10^{-3} \cdot E$ . Приняв, что  $\sigma_0 = \frac{1}{2} \sigma$ , результаты вычислений в таблице 4.1.

Для нитей практически важной характеристикой является предел прочности на растяжение ( $\sigma_{пр}$ ). Эта величина сильно зависит от технологии, поэтому в справочниках ее, как правило, нет. Если принять соотношение между  $E$  и  $\sigma_{пр}$  для Si ( $E/\sigma_{пр}=50$ ,  $\sigma_{пр}$  было получено экспериментально) таким же и для других материалов, то вычисленные значения  $\sigma_{пр}$  приведены в таблице 4.1. Имеет смысл принять  $\sigma_{пр} = \sigma_{кр}$  (см.п.2.12), т.к. по смыслу эти величины идентичны.

В работе будут использованы 4 варианта геометрических размеров (см.табл.4.2). Материал и вариант размеров задает преподаватель.

Таблица 4.2.

Геометрические размеры нитей

№	Длина $l$ , мкм	Ширина, $b$ , мкм	Толщина, $h$ , мкм	Число нитей, $n$	Ширина зазора, $d$ , мкм
1	3	1	0,5	4	1
2	4	1,5	0,75	4	1,2
3	5	2	1	4	1,4
4	6	2,5	1,5	4	2,0

## 4.2. Задание

4.2.1. По формулам 2.13 и 2.14 вычислить  $x_{пр}$  и  $\alpha_{кр}$ .

4.2.2. По формуле 2.10 вычислить резонансную частоту  $f_0$ .

4.2.3. Задаваясь значениями  $x$  (5- 500 нм) измерить  $U_{\text{ВЫХ}}$  (мВ) и по формуле 4.2. вычислить « $\alpha$ ». Результаты внести в таблицу 4.1.

Таблица 4.3.

Результаты измерений

$x$ , нм	10	20	50	100	200	400
$U_{\text{ВЫХ}}$ , мВ						
$\alpha$ , $\cdot 10^3$ м/с <sup>2</sup>						

4.2.4. Оценить погрешность измерения « $\alpha$ ».

Примечание: при оценке погрешности « $\alpha$ » учесть, что относительные погрешности измерения величин  $h$ ,  $b$ ,  $l$ ,  $d$  равны 3%;  $\varepsilon(\sigma_0)$ -5%;  $\varepsilon(U_{\text{оп}}) = 1\%$ ;  $\varepsilon(\rho)$ =3%;  $\varepsilon(U_{\text{ВЫХ}})$ =3%; смещение ( $x$ ) измерялось оптическим методом (лазер),  $\varepsilon(x)$ +10%.

4.2.5. Построить зависимость  $\alpha(U_{\text{ВЫХ}})$ . На графике указать доверительные интервалы измерений .

4.2.6. Сделать выводы

## 5. Контрольные вопросы

5.1. Какие еще принципы работы акселерометров Вы знаете? Предложите свои.

5.2. Какие существуют методы измерения смещения инерционной массы?

5.3. Какие изменения нужно сделать в данном приборе, чтобы надежно можно было измерять ускорения  $\alpha < g$  - ускорения свободного падения?

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАНТИЛЕВЕРА (КОНСОЛИ)

## 1. Введение

Наиболее простые базовые микроэлектромеханические системы (МЭМС) – микроконсоли (кантилеверы). Они являются механическими микрорезонаторами, работа которых может описываться с высокой точностью простыми классическими уравнениями как системы с одной степенью свободы [3,4]. В большинстве случаев такие устройства создаются из монокристаллического кремния (Si) или поликремния, его оксидов и нитридов различного состава. Малые размеры таких микроконструкций делают возможными их колебания на высоких резонансных частотах (до 1 ГГц и более). Кроме того, такие размеры определяют возможность достижения высокой добротности (до  $10^5$ - $10^6$ ), что существенно выше добротности всех известных электромагнитных контуров. Микрорезонаторы относительно просты в изготовлении, легки в использовании и интерпретации результатов измерений. Поэтому именно эти элементы МЭМС нашли самое широкое применение.

Целью данной работы является знакомство с устройством консолей, методами расчета основных динамических характеристик микро-резонаторов, экспериментальное определение резонансной частоты.

## 2. Теоретические положения

Схематически консольную балку можно изобразить следующим образом (рис.2.1.):

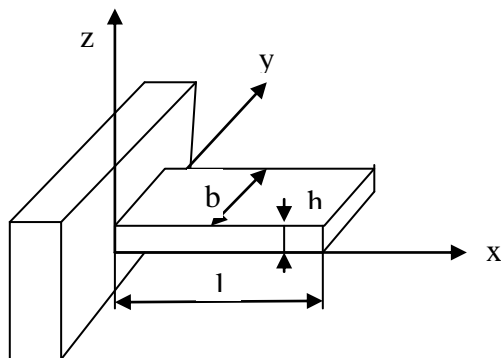


Рис.2.1. Схематическое изображение консоли, где  $l$ ,  $b$ ,  $h$  – длина, ширина, толщина соответственно

Физической основой действия таких элементов в динамических условиях является смещение (сдвиг по фазе или амплитуде) собственной или резонансной частоты при каком-либо воздействии на них или изменении массы. Для описания динамического поведения механических резонаторов используются различные подходы. В наиболее простом из них механический резонатор рассматривается как одномерный линейный гармонический, слабо демпфирующий осциллятор. Он представляет собой некоторую эффективную массу  $m_{\text{эф}}$ , связанную с упругой пружиной с эффективной жесткостью  $K_{\text{эф}}$ , способную совершать затухающие или вынужденные колебания с частичным рассеиванием (диссипацией) упругой энергии за счет внешнего или внутреннего трения с эффективным коэффициентом трения  $r_{\text{эф}}$ [4]. Кинетика таких колебаний, приводящих к возврату в равновесное состояние после вывода его из равновесия (задания некоторого начального смещения  $z(0)$ ), описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m_{\text{эф}} \frac{d^2 z}{dt^2} + r_{\text{эф}} \frac{dz}{dt} + K_{\text{эф}} z = 0 \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения при малом  $r_{\text{эф}}$  описывает затухающие колебания с собственной круговой частотой  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , где  $f_0$  – периодическая частота (Гц):

$$z(t) = z(0) \exp\left[-\frac{r_{\text{эф}} \cdot t}{2m_{\text{эф}}}\right] \cos(\omega t). \quad (2.2)$$

В теории гармонических колебаний  $\frac{r_{\text{эф}}}{2m_{\text{эф}}} = \beta$  – коэффициент затухания,  $[\beta] = \frac{1}{c}$ . Тогда уравнение (2.2) можно записать:

$$z(t) = z(0) \exp[-\beta t] \cos(\omega t).$$

При малом значении  $r_{\text{эф}}$  ( $r_{\text{эф}} \rightarrow 0$ ):

$$\omega = \left[ \frac{K_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}} - \beta^2 \right]^{1/2}, \quad \omega_0 = \left( \frac{K_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}} \right)^{1/2}.$$

Натуральный логарифм отношения двух соседних амплитуд есть логарифмический декремент затухания

$$\chi = \ln \frac{A(0)}{A(T)} = \ln \frac{A(0)}{A(0)e^{-\beta T}} = \beta T; \quad T = \frac{1}{f_0} = \frac{\omega_0}{2\pi};$$

$$\chi = \frac{2\pi\beta}{w_0} = \frac{2\pi r_{\text{эф}} \cdot m_{\text{эф}}^{1/2}}{2m_{\text{эф}} \cdot K_{\text{эф}}^{1/2}} = \frac{\pi \cdot r_{\text{эф}}}{(m_{\text{эф}} \cdot K_{\text{эф}})^{1/2}} \quad (2.3)$$

При приложении к гармоническому осциллятору внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону с круговой частотой  $w$ :  $F_0 \cos(wt)$ , его колебания описываются уравнением

$$z(t) = \frac{F_0 \cos(wt - \varphi)}{\left[ (K_{\text{эф}} - m_{\text{эф}} \cdot w^2)^2 + w^2 \cdot r_{\text{эф}}^2 \right]^{1/2}}, \quad (2.4)$$

где  $\varphi$  угол сдвига фаз между силой и смещением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{wr_{\text{эф}}}{K_{\text{эф}} - m_{\text{эф}} \cdot w^2}$$

Амплитудное значение смещения

$$A(w) = \frac{F_0}{\left[ (K_{\text{эф}} - m_{\text{эф}} \cdot w^2)^2 + w^2 \cdot r_{\text{эф}}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.5)$$

Для вывода формулы (2.5) вспомним:

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 - 4\beta^2 w^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^4 - 2w_0^2 w^2 + w^4) + \frac{4r^2 w^2}{4m^2}}} = \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(m^2 w_0^4 - 2w_0^2 m^2 w^2 + m^2 w^4) + \frac{r^2 w^2 m^2}{m^2}}} = \frac{F_0}{\sqrt{(K - mw^2)^2 + r^2 w^2}} \end{aligned}$$

Показателем демпфирующей способности осциллятора при этом является тангенс угла потерь  $\operatorname{tg} \delta$ , где  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , связанный с показателями затухания соотношениями:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\chi}{\pi} = \frac{2\beta}{w_0}.$$

При равенстве частоты внешней силы частоте собственных колебаний

$w = w_0 = \left( \frac{K_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}} \right)^{1/2}$  наблюдается резкое возрастание амплитуды

(резонанс) до значения  $z(0) = \frac{F_0}{w_0 \cdot r_{\text{эф}}}$ .



Для колеблющихся консолей и мостиковых структур соотношения, полученные для одномерного линейного гармонического демпфирующего осциллятора, применимы вблизи резонансной частоты при правильной оценке их эффективной массы и жесткости с учетом соответствующей моды колебаний. Такие балки при приложении гармонической нагрузки ведут себя аналогично натянутой струне: они при резонансе осциллируют по синусоиде вдоль оси  $x$ , а их форма определяется граничными условиями. При этом первая и основная мода колебаний балки соответствует форме, которую она принимает при квазистатическом прогибе, т.е. при нулевой частоте и амплитудном значении прикладываемой нагрузки [4].

Для консольной балки  $m_{эф} = \frac{3m}{c_n^4}$ , где  $c_n$  – const, равная для первой моды ( $n=1$ ) колебаний 1,875, для второй ( $n=2$ ) – 4,694 и т.д. Следовательно, при прямоугольном сечении  $n$   $b$  и длине  $l$  для первой моды колебаний  $m_{эф}=0,24$   $m$ .  $m$  – истинная масса балки, равная  $m=h \cdot b \cdot l \cdot \rho$ , где  $\rho$  – плотность материала балки.

$$m_{эф}=0,24 \cdot h \cdot b \cdot l \cdot \rho \quad (2.6)$$

Эффективная жесткость колеблющихся балок равна их коэффициентам упругости, рассчитываемым при статическом прогибе.

Для прямоугольной консоли эффективная жесткость равна

$$K_{эф} = \frac{E \cdot h^3 b}{4l^3}, \quad (2.7)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

С учетом  $m_{эф}$  и  $K_{эф}$  резонансная круговая частота может быть с достаточно высокой точностью рассчитана по соотношению

$$w_0 = \left( j \cdot \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \cdot \frac{h}{l^2} \quad (2.8)$$

где  $j$  – коэффициент, близкий к 1.

$$\left( w_0 = \sqrt{\frac{K_{эф}}{m_{эф}}} \right) = \sqrt{\frac{E h^3 b}{4l^3 \cdot 0,24 \cdot \rho h \cdot b}} = \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{0,96 \rho}}; \quad j = 1,02$$

$$w_0 = \left( j \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \frac{h}{l^2} = 1,02 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.10)$$

Резонансная частота заданной моды колебаний рассчитывается по соотношению:

$$f_{0n} = \frac{C_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{\text{эф}}}{3m}} = \frac{C_n^2}{4\sqrt{3}\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{h}{l^2} \quad (2.9)$$

Далее будем оперировать только 1-й модой колебаний.

Вблизи резонансного пика частотная зависимость амплитуды вынужденных колебаний балок как одномерных линейных, слабо демпфирующих гармонических осцилляторов **при отсутствии внешнего трения** (вязкости среды, т.е.в вакууме) описывается соотношением:

$$A(w) = \frac{A_0 w_0^2}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)^2 + \frac{w^2 w_0^2}{Q^2}}};$$

где  $A_0$  – амплитуда смещения при нулевой частоте;  $w$  и  $w_0$  – фактическая и резонансная частоты соответственно;  $Q$  – добротность осциллятора ( $Q$ - фактор).

Напомним: добротность – отношение запасенной в колебательной системе энергии ( $E_3$ ) к средней за период мощности потерь  $P$ .  $Q = \frac{wE_3}{P}$ . С другой стороны,  $Q$  характеризует резонансные свойства линейной колебательной системы: добротность численно равна отношению резонансной частоты  $w_0$  к ширине резонансной кривой  $\Delta w$  на уровне убывания амплитуды в  $\sqrt{2}$  раз:  $Q = \frac{w_0}{\Delta w}$ . Полезны следующие соотношения:

$$Q = \frac{(m_{\text{эф}} \cdot K_{\text{эф}})^{1/2}}{r_{\text{эф}}} = \frac{w_0 \cdot m_{\text{эф}}}{r_{\text{эф}}} = \frac{K_{\text{эф}}}{w_0 \cdot r_{\text{эф}}}; \quad (2.11)$$

$$Q = \frac{w_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\chi}, \text{ где } \chi - \text{ логарифмический декремент затухания. При}$$

проявлении нескольких источников диссипации энергии в колебательной системе складываются обратные величины  $Q$ -фактора:

$$\frac{1}{Q} = \sum_1^n \frac{1}{Q_i}.$$

При этом, в случае многомодовых колебаний, каждая из мод обладает собственным  $Q$ -фактором.

$Q$ -фактор колебательных систем на основе жестких материалов обычно очень большой и зависит преимущественно от геометрии балок и окружающей среды. Так, эксперимент для консольных балок из поликремния показал, что при постоянных ширине  $b=15$  мкм и толщине  $h=2$  мкм, при  $l=150$  мкм, резонансной частоте  $f_0=145$  кГц и

давлении воздуха  $p=0,2$  Па  $Q=38000$ ; при  $l=75$  мкм и  $f_0=560$  кГц  $Q=15000$ . Но уже при давлении  $p=40$  Па при  $l=150$  мкм,  $f_0=145$  кГц  $Q=6000$ , а при  $l=75$  мкм и  $f_0=560$  кГц  $Q=16000$  [4].

Таким образом, окружающая среда с высокой плотностью ( $\rho$ ) и вязкостью ( $\eta$ ) может оказывать определяющее влияние как на резонансную частоту, так и Q-фактор консольных балок в наномасштабе. Влияние вязкости среды на частоту и Q-фактор свободной консольной балки при вынужденных колебаниях учитывается при этом через гидродинамическую функцию  $\Gamma(w)$ .  $\Gamma(w)$  удалось определить только для консольной балки круглого сечения с использованием Бесселевых функций 3-го типа.

Балочные чувствительные элементы сенсорных устройств обычно расположены на достаточно близком расстоянии ( $h_0$ ) от подложки и работают в воздушной среде. Поэтому важную роль в их высокочастотных колебаниях играет так называемое демпфирование за счет перетекания воздуха из промежутка между балкой и подложкой. Эффективный коэффициент демпфирования  $r_{\text{эф}}$  при первой моде колебаний и малом безразмерном параметре  $\sigma = \frac{12\eta b^2}{\rho \cdot h_0^2} w$  и частоте, значительно меньшей критической  $w_c = \frac{\pi^2 h_0^2 p}{12\eta b^2}$ , рассчитывается по формуле

$$r_{\text{эф}} = \frac{96\eta \cdot lb^3}{\pi^4 h_0^3} \quad (2.12)$$

Оценим критическую частоту для воздуха при нормальных условиях:  $p=10^5$  Па, вязкость  $\eta=17,2 \cdot 10^{-6}$  Па·с и заведомо больших значениях  $l$ ,  $b$ ,  $h$ :  $l=75$  мкм,  $b=10$  мкм,  $h=2$  мкм,  $h_0=5$  мкм:

$$\text{мкм: } w_c = \frac{\pi(5 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 10^5}{12 \cdot 17,2 \cdot 10^{-6} (10^{-5})^2} = 1,2 \cdot 10^9 \left(\frac{1}{\text{с}}\right)$$

Резонансная частота  $w_0$  для Si с такими параметрами (2.10):

$$w_0 = 1,02 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1,02 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(75 \cdot 10^{-6})^2} \sqrt{\frac{200 \cdot 10^9}{2,32 \cdot 10^3}} = 3,37 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{\text{с}}\right)$$

Поскольку  $w_c \gg w_0$  для расчета  $r_{\text{эф}}$  можно пользоваться формулой (2.12).

### 3. Задание и порядок выполнения работы

Исследуем динамические характеристики консолей, параметры которых находятся в микрометровом, но вблизи нанометрового диапазона (см.табл.3.1).

Таблица 3.1

Геометрические размеры исследуемых образцов консолей

№ варианта	h, мкм	b, мкм	l, мкм
1	0,5	2,0	10
2	0,75	3,0	15
3	1,0	4,0	20
4	1,5	5,0	25

Используемые материалы консолей и их основные характеристики в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

Основные характеристики материала консолей

материал	Плотность, $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	Модуль Юнга, E, ГПа
Si	2,32	200
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	3,1	380
SiC	2,55	200

**Для всех материалов и вариантов амплитуда внешней силы  $F_0 = 4 \cdot 10^{-6}$  Н.**

3.1. По формулам (2.6), (2.7), (2.10), (2.11), (2.12) вычислить  $m_{эф}$ ,  $K_{эф}$ ,  $w_0$ ,  $Q$ ,  $r_{эф}$  для двух консолей. Материал консолей и варианты геометрических размеров задает преподаватель.

3.2. Измерить амплитуды колебаний при заданных значениях частот (в долях  $w_0$ ) и результаты измерений внести в таблицу 3.3. амплитуды колебаний измеряются оптическим методом – лазерный луч (конструкция оптической установки не рассматривается).

Таблица 3.3.

Амплитуды колебаний консолей при различных значениях частоты внешней силы

Частота внешней ЭДС	$w_1=0,7 w_0$	$w_2=0,8 w_0$	$w_3=0,9 w_0$	$w_4=0,95 w_0$	$w_5=0,975 w_0$	$w_6=1,025 w_0$	$w_7=1,05 w_0$	$w_8=1,1 w_0$	$w_9=1,2 w_0$	$w_{10}=1,3 w_0$
1)А, мкм										
w, 1/с										
2)А, мкм										

Примечание: нельзя подавать частоту больше, чем  $w=0,975 w_0$ , т.к. вблизи резонанса А может быть больше  $h_0= 5$  мкм.

3.3. Построить резонансные кривые по результатам измерений  $A(w)$ , где  $w$  – частота в рад/с (1/с). По этим кривым определить резонансные частоты и сравнить с вычисленными значениями  $w_0$ .

3.4. По результатам вычислений и измерений сделать выводы.

#### 4. Контрольные вопросы

- 4.1. Как влияет жесткость консоли на  $w_0$  и  $Q$ ?
- 4.2. Как связаны масса консоли и резонансная частота  $w_0$ ?
- 4.3. Какой из геометрических размеров консоли оказывает большее влияние на добротность  $Q$  и резонансную частоту?
- 4.4. Как изменилась бы резонансная частота при увеличении расстояния консоль-подложка ( $h_0$ )?

## Литература

1. СП-б гос.электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина) УМК "Микро- и наносистемная техника" // Электронный ресурс: [http://miel.tusur.ru/images/files/Uchebno-metodicheskii\\_kompleks%20disciplin/Mukhachev/УМК Микро- и наносистемная техника.pdf](http://miel.tusur.ru/images/files/Uchebno-metodicheskii_kompleks%20disciplin/Mukhachev/УМК Микро- и наносистемная техника.pdf)
2. В.Я.Распопов Микромеханические приборы: Учебное пособие.-М.: Машиностроение, 2007.-164-168 //Электронный ресурс: <http://miel.tusur.ru>.
3. Механцев Е.Б., Лысенко И.Е. Физические основы микросистемной техники: Учебное пособие.-Таганрог:Изд-во ТРТУ, 2004, С.13-24 // Электронный ресурс: <http://miel.tusur.ru>.
4. Бабаевский П.Г., Резниченко Г.М. Электромеханические преобразователи сенсорных микро- и наносистем: физические основы и масштабные эффекты. Часть 1. НиМСТ, №11, 2008 г // Электронный ресурс: [http://miel.tusur.ru/images/files/Uchebno-metodicheskii\\_kompleks%20disciplin/Mukhachev/П.Е.Бабаевский, Г.М.Резниченко. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ СЕНСОРНЫХ МИКРО- И НАНОСИСТЕМ ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МАСШТАРБНЫЕ ЭФФЕКТЫ.doc](http://miel.tusur.ru/images/files/Uchebno-metodicheskii_kompleks%20disciplin/Mukhachev/П.Е.Бабаевский, Г.М.Резниченко. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ СЕНСОРНЫХ МИКРО- И НАНОСИСТЕМ ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МАСШТАРБНЫЕ ЭФФЕКТЫ.doc)

## Содержание

I Исследование конструкции и характеристик струнного акселерометра....	2
1. Основные сведения об акселерометре с упругим подвесом струнного типа.....	2
2. Расчет характеристик струнного преобразователя.....	4
3. Емкостные преобразователи перемещений.....	8
4. Задание. Порядок выполнения работы.....	9
5. Контрольные вопросы.....	11
II Исследование динамических характеристик кантилевера (консоли).....	12
1. Введение.....	12
2. Теоретические положения.....	12
3. Задание и порядок выполнения работы.....	17
4. Контрольные вопросы.....	18
5. Литература.....	18
6. Содержание.....	19